1 Energieerhaltung im expandierenden Universum

Die großräumige Materieverteilung im Universum beschreibt man in der Kosmologie üblicherweise als ideale Flüssigkeit mit einer homogenen Energiedichte ρ und einem Druck p. Der Energie-Impuls-Tensor eines solchen Materieverteilung kann als

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \tag{1}$$

geschrieben werden, wobei u^μ die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen ist und $g^{\mu\nu}$ der inverse metrische Tensor. In einem lokalen Inertialsystem, das mit dem kosmischen Medium mitbewegt ist, verschwinden die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit, so dass $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Da in diesem System der metrische Tensor lokal Minkowski-Gestalt hat, lautet die Darstellung des Energie-Impuls-Tensors

$$T^{00} = (\rho + p)(u^0)^2 - pg^{00} = \rho, \quad T^{ii} = -pg^{ii} = p$$

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Das allgemein-relativistische Pendant zur Energieerhaltung ist die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors, $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, wobei das Semikolon die kovariante Ableitung nach der Koordinate x^μ symbolisiert. Es gilt:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} T^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}$$

$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ist die partielle Ableitung, die Γ sind die Christoffelsymbole. Entsprechend der Einsteinschem Summenkonvention wird über doppelt vorkommende Indizes, hier μ und λ, summiert. Die Christoffelsymbole sind durch

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

gegeben. In einer flachen Raumzeit würden sie in einem Inertialsystem alle verschwinden, daher wäre einfach $T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}$, so dass für die 0-Komponente gelten würde:

$$T^{\mu 0}_{;\mu} = \partial_0 T^{00} = \dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \tag{2}$$

Die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors würde also auf die zeitliche Konstanz der Energiedichte ρ hinauslaufen, wie bei Abwesenheit von Energieflüssen in einer flachen Raumzeit nicht anders zu erwarten.

Für ein expandierendes Universum ist die Raumzeit jedoch nicht flach, sondern wird durch die Robertson-Walker-Metrik beschrieben, mit der Darstellung

$$ds^2 = (cdt)^2 - S(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right)$$

in den Koordinaten $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Man erkennt als Komponenten des metrischen Tensors:

$$g_{00} = 1, \quad g_{rr} = -\frac{S(t)^2}{1-kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = -S(t)^2 r^2, \quad g_{\phi\phi} = -S(t)^2 r^2 \sin^2\theta$$

Daraus ergibt sich als inverse Metrik:

$$g^{00} = 1, \quad g^{rr} = -\frac{1-kr^2}{S(t)^2}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{S(t)^2 r^2}, \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{S(t)^2 r^2 \sin^2\theta}$$

Die Christoffelsymbole verschwinden nun nicht mehr, sondern sind

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{rr} &= \frac{S(t)\dot{S}(t)}{1-kr^2} = -\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} g_{rr} \\
\Gamma^0_{\theta\theta} &= r^2 S(t)\dot{S}(t) = -\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} g_{\theta\theta} \\
\Gamma^0_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2\theta S(t)\dot{S}(t) = -\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} g_{\phi\phi} \\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r(1-kr^2) \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta(1-kr^2) \\
\Gamma^r_{0r} &= \Gamma^r_{r0} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \\
\Gamma^\theta_{0\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta 0} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\cos\theta\sin\theta \\
\Gamma^\phi_{0\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi 0} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}$$

Um die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors zu berechnen, muss man diesen entsprechend (1) in den Koordinaten (t, r, θ, ϕ) darstellen. Dabei gilt wieder

$u^\mu = (1,0,0,0)$, da sich die Flüssigkeitsteilchen an festen räumlichen Positionen befinden und die räumlichen Geschwindigkeitskomponenten daher verschwinden, so dass

$$T^{00} = \rho, \quad T^{rr} = -pg^{rr}, \quad T^{\theta\theta} = -pg^{\theta\theta}, \quad T^{\phi\phi} = -pg^{\phi\phi}$$

Damit ergibt sich als 0-Komponente der Divergenz

$$\begin{aligned}
T^{\mu 0}_{;\mu} &= \underbrace{\partial_0 T^{00}}_{\dot\rho} + \Gamma^0_{\mu\mu} T^{\mu\mu} + \Gamma^\mu_{0\mu} T^{00} \\
&= \dot\rho + \Gamma^0_{rr} T^{rr} + \Gamma^0_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^0_{\phi\phi} T^{\phi\phi} + T^{00} \underbrace{\left(\Gamma^r_{0r} + \Gamma^\theta_{0\theta} + \Gamma^\phi_{0\phi}\right)}_{3\dot S(t)/S(t)} \\
&= \dot\rho + p\frac{\dot S(t)}{S(t)} \underbrace{g_{rr} g^{rr}}_{1} + p\frac{\dot S(t)}{S(t)} \underbrace{g_{\theta\theta} g^{\theta\theta}}_{1} + p\frac{\dot S(t)}{S(t)} \underbrace{g_{\phi\phi} g^{\phi\phi}}_{1} + 3\rho\frac{\dot S(t)}{S(t)} \\
&= \dot\rho + 3\rho\frac{\dot S(t)}{S(t)} + 3p\frac{\dot S(t)}{S(t)}
\end{aligned}$$

Gegenüber (2) treten neben der partiellen Ableitung $\dot\rho$ zwei weitere Terme $\propto \dot S(t)/S(t)$ hinzu. Der erste, $3\rho\dot S(t)/S(t)$, ist leicht einzusehen: wenn der Skalenfaktor $S(t)$ größer wird, so dass $\dot S(t) > 0$, erscheint es naheliegend, dass die Energiedichte abnimmt, $\dot\rho < 0$. Der zweite, p enthaltende Term ist weniger intuitiv, er resultiert daraus, dass in den Energie-Impuls-Tensor neben der Energiedichte eben auch der Druck eingeht. Deutlicher wird das Ergebnis, wenn man die Gleichung $T^{\mu 0}_{;\mu} = 0$ mit $S(t)^3$ multipliziert:

$$\dot\rho S(t)^3 + 3\rho\dot S(t) S(t)^2 + 3p\dot S(t) S(t)^2 = 0$$

und den Druckterm auf die rechte Seite bringt:

$$\dot\rho S(t)^3 + 3\rho\dot S(t) S(t)^2 = -3p\dot S(t) S(t)^2$$

Für die linke Seite gilt nun (Kettenregel)

$$\dot\rho S(t)^3 + 3\rho\dot S(t) S(t)^2 = \frac{d}{dt}\left(\rho S(t)^3\right)$$

und für die rechte Seite

$$3p\dot S(t) S(t)^2 = p\,\frac{d}{dt} S(t)^3$$

so dass

$$\frac{d}{dt}\left(\rho S(t)^3\right) = -p\,\frac{d}{dt} S(t)^3$$

$\rho S(t)^3$ entspricht der Gesamtenergie: die Energiedichte ρ multipliziert mit dem Volumen, das proportional zu $S(t)^3$ ist. Die linke Seite gibt folglich die Änderung der Gesamtenergie an. Auf der rechten Seite steht der Druck multipliziert mit der Änderung des Volumens. Anders ausgedrückt besagt die Gleichung, dass

$$dE/dt = -pdV/dt \tag{3}$$

Die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors führt gerade dazu, dass im expandierenden Universum mit anwachsendem Skalenfaktor $S(t)$ die Energie global nicht erhalten bleibt.

(3) ähnelt der Beziehung für die innere Energie eines Gases mit dem Gasdruck p, das in einen Zylinder mit Kolben eingeschlossen ist: zieht man den Kolben ein Stück heraus, so dass das Gasvolumen um $dV > 0$ größer wird, so verrichtet das Gas am Kolben die Arbeit $\delta W = pdV$, die der inneren Energie U des Gases entzogen wird, so dass $dU = -\delta W = -pdV$. Anders als beim Gas im Zylinder gibt es beim expandierenden Universum aber keinen Kolben, an dem Arbeit verrichtet würde.