Orientating Warp Calculation

JLP2 ☼ JeanLucPicard2

2009-12-01

> *… the warp coil [is the most important example of progress over the last two hundred years]. Before we had warp drive, Humans were confined to a single sector of the galaxy.*
>
> — *William T. Riker* in *A Matter of Time*

1 Was ist *Warp*?

Wikipedia[1] sagt dazu: »*Der Warpantrieb ist eine Form des Über-Lichtgeschwindigkeit-Antriebs im fiktionalen Star-Trek-Universum, der im Stande ist, ein Raumschiff oder andere Objekte auf ein Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit anzutreiben, ohne dabei in Konflikt mit der Zeitdilatation zu kommen.*«

Der Warpantrieb ermöglicht Reisen mit Über-Lichtgeschwindigkeit. Er erzeugt ein Warpfeld, das eine asymmetrische Subraumblase generiert, die das Schiff einhüllt. Durch die Verzerrung des örtlichen Raum-Zeit-Kontinuums ist es möglich, dass das Schiff Geschwindigkeiten erreicht, die für einen externen Beobachter die Lichtgeschwindigkeit übersteigen, während das Schiff innerhalb der Subraumblase still steht. Auf diese Weise ist es möglich, die Geschwindigkeitsbarriere des normalen Raum-Zeit-Kontinuums zu umgehen.

2 Wie hängt der Warpfaktor mit der tatsächlichen Geschwindigkeit zusammen?

Um den Warpfaktor zu berechnen, wurde in TOS[2] (23. Jahrhundert) die „*Cochrane*-Skala“ eingeführt. Diese Skala beschreibt den Zusammenhang zwischen Warpfaktor und

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Warp_drive`
[2] Star Trek: The Original Series

dem zugeordneten Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit als einfache kubische Funktion: $f(x) = x^3$

Seit TNG[3] (24. Jahrhundert) wurde der Warpfaktor neu definiert, wobei hier keine exakte Formel mehr angegeben wurde, sondern lediglich einige Eckdaten in einer Referenztabelle von Warpfaktor und zugeordneten Lichtgeschwindigkeitsvielfachen in der *Star Trek Enzyklopädie* zur Verfügung stehen.

Dieser Artikel versucht die Ansätze darzustellen, eine Warpformel für die TNG-Ära zu entwickeln, die die bekannten Referenzdaten möglichst genau abbildet.

3 Wen interessiert so eine Formel eigentlich? — Gibt es nichts Wichtigeres?

Ein Forumsbenutzer hat einmal geschrieben[4] , Reisen durch den Weltraum würden in *Star Trek* häufig mit frühen Seereisen verglichen. In einer solchen Welt gäbe es Strömungen, günstige und ungünstige Winde, gefährliche Passagen und dergleichen. Das sei eher im Sinne der Autoren als mathematische Korrektheit.

Das ist in der Tat eine nicht von der Hand zu weisende Beobachtung und es wird wohl auch niemand ernsthaft behaupten, man sollte eine Formel zur Berechnung der Warpgeschwindigkeit auf den höchsten Sockel der Gewissheit setzen. Aber sie kann *sehr wohl* dafür herhalten, Entfernungen und Geschwindigkeiten im Star-Trek-Universum *abzuschätzen*. Das bedeutet nicht, dass alle genannten Werte immer hundertprozentig genau stimmen müssen. Dass natürlich auch unpassende Angaben in den Serien und Kinofilmen gemacht wurden, ist unbestritten.

Manch einem mag der ganze Aufwand zur Berechnung der Warpgeschwindigkeit als völlig übers Ziel hinausgeschossen vorkommen – und auch das ist ein nachvollziehbarer Standpunkt; nun ist ja glücklicherweise niemand gezwungen, sich mit diesem Thema weitergehend auseinanderzusetzen. *Star Trek* besteht ja nicht vorrangig aus Zahlen, aber sie spielen eben doch auch eine Rolle – für die einen mehr, für die anderen weniger. Und so kann doch der Versuch, eine möglichst exakte und sinnvoll definierte Warpfunktion zu erstellen, zumindest als eine Art mathematischer Spielerei betrachtet werden.

Nichtsdestoweniger: *Star Trek* bietet durchaus die Möglichkeit, die vorgesetzten Handlungen und Daten von unterschiedlichster Betrachtungsweise und mit unterschiedlichsten Schwerpunktsetzungen zu analysieren. Was hier nun bedeutet, die Referenzen zur Warpgeschwindigkeit durchzugehen und eine Formel zu entwickeln, die die in der Serie dargestellten Warpfaktor-Geschwindigkeit-Wertepaare möglichst gut wiedergibt.

[3]Star Trek: The Next Generation
[4]`http://www.scifi-forum.de/showthread.php?p=1816704`

4 Welche Referenzwerte für so eine Warpformel existieren denn nun?

Erstmal stehen für eine Warpformel der TNG-Ära natürlich die schon erwähnten Referenzwerte aus der *Star Trek Enzyklopädie* zur Verfügung.

Referenzwerte aus der *Star Trek Enzyklopädie*

Warp	Geschwindigkeit	gefolgerter Exponent
1	1	$\in \mathbb{R}$
2	10	3.32192809
3	39	3.33471752
4	102	3.33621267
5	214	3.33406836
6	392	3.33262469
7	656	3.33322728
8	1 024	3.33333333
9	1 516	3.33321894
9.2	1 649	3.33810053
9.6	1 909	3.34002037
9.9	3 053	3.50000364
9.99	7 912	3.89998087
9.9999	199 516	5.30000075
10	∞	∞

Warp Warpfaktor $f(x)$

Geschwindigkeit Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit x

gefolgerter Exponent aus Warpfaktor und Geschwindigkeit folgt der Exponent k für $f(x) = x^k$ berechnet durch $\log x / \log f(x)$

Es ist dabei auffällig, dass sich der Exponent für Warpgeschwindigkeiten bis einschließlich Warp 9 *exakt* mit 10/3 annähern lässt, sodass der Zusammenhang zwischen Warpfokter und zugehörigen Lichtgeschwinfigkeitsvielfachen für diesen Bereich als einfache Potenzfunktion $f(x) = x^{10/3}$ ausgedrückt werden kann.

Es ist jedoch keine Funktion bekannt, die auch die Exponenten der Warpfaktoren größer 9 hinreichend genau approximiert. Es ist daher sinnvoll, die Warpfunktion abschnittsweise zu definieren, da ein einfacher polynomialer Ausdruck nicht möglich scheint – wenngleich es auch hier Ansätze[5] gibt.

[5] siehe Abschnitt „Lösungsansätze durch nicht abschnittsweise Approximation“, Seite 4

Es stellt sich hier natürlich auch die Frage, wie es zu diesen doch sehr ... *unschönen* ... Werten kommt. Hierzu ein Zitat aus dem *Star Trek: The Next Generation Technical Manual*:

> *Figuring out how "fast" various warp speeds are was pretty complicated, but not just from a "scientific" viewpoint. First, we had to satisfy the general fan expectation that the new ship was significantly faster than the original. Second, we had to work with Gene's recalibration, which put Warp 10 at the absolute top of the scale. These first two constraints are fairly simple, but we quickly discovered that it was easy to make warp speeds* too fast ... *Finally, we had to provide some loophole for various powerful aliens like Q, who have a knack for tossing the ship millions of light years in the time of a commercial break. Our solution was to redraw the warp curve so that the exponent of the warp factor increases gradually, then sharply as you approach Warp 10. At Warp 10, the exponent (and the speed) would be infinite, so you could never reach this value.*

> Noch eine Anmerkung: Das *Star Trek: The Next Generation Technical Manual* gibt außerdem an, dass ein Subraumsignal, das sich mit Warp 9.9997 bewegt, 45 Minuten brauche, um 17 Lichtjahre zurückzulegen, was ungefähr 200 000 - facher Lichtgeschwindigkeit entspräche. Dieser Wert scheint jedoch deutlich zu hoch in Anbetracht des exponentiellen Wachstums der Warpfunktion und deutlich zu niedrig für Echtzeit-Subraumkommunikation über größere Distanzen.

5 Lösungsansätze durch nicht abschnittsweise Approximation

Eine sehr häufig angetroffene Formel, die die Werte bis Warp 9.6 akkurat wiedergibt, ist folgende:

$$f(x) = x^{10/3} + (10 - x)^{-11/3}$$

Der Exponent besitzt neben dem ersichtlichen Wert[6] von 10/3 noch ein Korrekturglied, um die asymptotische Steigerung gegen Warp 10 zu generieren. Über Warp 9.6 hinaus liefert die Funktion jedoch keine brauchbaren Werte. Was für diese Funktion gilt, gilt auch für die Formel von *Pete Carr*:

$$f(x) = x^{\left(10/3 + \frac{1}{10^5 - x^5}\right)}$$

Diese Funktion trifft die Werte für Warp 9.2 und Warp 9.6 leicht schlechter. Ihr Graph verläuft insgesamt jedoch flacher als der der tatsächlichen Warpfunktion im eigentlich relevanten Definitionsbereich und kommt dieser damit tendenziell näher – im Gegensatz zu erstgenannter Funktion, deren Graph steiler verläuft.

[6] siehe Abschnitt „Welche Referenzwerte für so eine Warpformel existieren denn nun?“, Seite 3

Eine ebenfalls weit verbreitete Formel von *Martin Shields*, die auch die Werte über Warp 9.6 recht akkurat approximiert, ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \frac{x^{10/3}}{1 - (x/10)^{\left(\frac{91.28}{(x/10)^{0.27}}\right)}}$$

Als die beste der bis hierher bekannten Approximationsfunktionen – durch die Benutzung der Heaviside-Funktion[7] Θ implizit abschnittsweise definiert – kann wohl die folgende Funktion betrachtet werden, die von *Dominic Berry* ersonnen wurde mit von *Martin Shields* leicht modifizierten Werten:

$$f(x) = x^{10/3 + \Theta(x-9)\cdot 0.036528749373\cdot(-\ln(10-x))^{1.79522947028}}$$

Alle hier genannten Formeln haben jedoch *nicht* die Eigenschaft, *alle* Werte aus der *Star Trek Enzyklopädie* so wiederzugeben, dass sie nach ganzzahliger Rundung *exakt* mit den Referenzwerten übereinstimmen. Nur dies soll nun als hinreichend gelten.

> Auch hier noch eine Anmerkung: Es gibt in der Tat nicht abschnittsweise definierte Funktionen, die alle Referenzwerte genau abbilden; beispielsweise durch die Komposition verschiedener trigonometrischer Funktionen. Solche Formeln sind jedoch umständlich über verzwickte Berechnungsvorschriften nur darauf ausgelegt, alleine die Referenzwerte zu treffen. Der Graph einer solchen Funktion ist meist auch etwas „holprig“ – soll heißen, die Funktion wächst nicht streng monoton und ist insbesondere nicht bijektiv. Abschnittsweise definierte Funktionen bieten hier eine geeignetere Lösung.

6 Ein Anforderungsprofil an die Warp-Funktion

Es ist Zeit, einmal genauer zu definieren, welche Eigenschaften die Warp-Funktion besitzen soll, um als hinreichend genau approximierend und als sinnvoll definiert gelten zu können. Folgende Bedingungen scheinen hier zweckmäßig:

- $f : A \to B\,, \quad x \mapsto f(x)$
- Definitionsmenge $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 10\}$
- Zielmenge $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$
- streng steigende Monotonie: $\forall x, a \in A : x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$
- Bijektivität: $\forall y \in B \exists^1 x \in A : f(x) = y$
- Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

[7] `http://de.wikipedia.org/wiki/Heaviside-Funktion`

- Einhaltung der Referenzwerte (nach ganzzahliger Rundung der Funktionswerte): $(1,1),(2,10),(3,39),(4,102),(5,214),(6,392),(7,656),(8,1\,024),(9,1\,516),$ $(9.2,1\,649),(9.6,1\,909),(9.9,3\,053),(9.99,7\,912),(9.9999,199\,516) \in f$
- Divergenz gegen Unendlich: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

> Zur Differenzierbarkeit: Diese mag auch als erstrebenswerte Eigenschaft erscheinen; sie wird sich aber unter einigen Lösungsansätzen als nicht so einfach umsetzbar erweisen und soll deshalb nicht gefordert werden. Eine Funktion, deren Graph zumindest rein optisch möglichst glatt erscheint, ist natürlich wünschenswert.

7 Warp-Geschwindigkeit, Lichtgeschwindigkeit und Subraumverzerrung

Es soll nun einmal kurz auf den Zusammenhang zwischen den konkreten *Warpfaktoren*, der *Subraumverzerrung*, die von einem Raumschiff erzeugt wird, das sich mit Warpgeschwindigkeit bewegt und des tatsächlichen *Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit* eingegangen werden.

Um die Geschwindigkeitsbarriere des Normalraumes zu umgehen, muss ein Raumschiff, um Warpgeschwindigkeit zu erreichen, ein Subraumfeld generieren, das eine Verzerrung des örtlichen Raum-Zeit-Kontinuums bewirkt. Die Stärke dieses Subraumfeldes wird in der Maßeinheit *Cochrane* angegeben.

Ein bestimmter Warpfaktor der nicht-linearen Warpskala entspricht also in erster Linie einer bestimmten Subraumfeldstärke und lässt sich somit auch in der Maßeinheit *Cochrane* angeben, die linear skaliert wird.

Eine *Warpfunktion* ist genau so eine Zuordungsvorschrift von Warpfaktor und zugeordneter Subraumfeldstärke in *Cochrane*.

Da die tatsächlich erreichte Geschwindigkeit wiederum direkt mit der Feldstärke des erzeugten Subraumfeldes zusammenhängt, gibt die aus dem Warpfaktor ermittelte Subraumfeldstärke indirekt auch die Geschwindigkeit an. *Cochrane* und *Vielfache der Lichtgeschwindigkeit* entsprechen dabei normalerweise einander. Abhängig von einer Vielzahl räumlicher Bedingung kann die tatsächlich erreichte Geschwindigkeit allerdings von der Feldstärke des erzeugten Subraumfeldes abweichen.

> Zur Begrifflichkeit I: Da aber in der Regel von idealisierten Raumbedingungen ausgegangen wird und die tatsächlich auftretenden Abweichungen wohl oft nicht signifikant sind, werden auch in diesem Artikel die Begriffe der *Subraumfeldstärke* und des *Lichtgeschwindigkeitsvielfachen* synonym verwendet.

> Zur Begrifflichkeit II: Der Terminus „*Cochrane-Skala*“ bezieht sich häufig *nicht* auf in *Cochrane* skalierte Subraumfeldstärken, sondern auf die Zuordung von Warpfaktor zu einer entsprechenden Subraumfeldstärke, wie sie nach der entsprechenden Warpskala bis ins 23. Jahrhundert verwendet wurde. Die im 24. Jahrhundert Verwendung findende Warpskala wird üblicherweise nicht mit diesem Begriff umschrieben.

8 Eine Lösung durch kubische Interpolationspolynome

Eine abschnittsweise definierte Funktion, die die Referenzwerte exakt trifft und aufgrund der benutzten Spline-Interpolation[8] einen sehr schönen Graphen ergibt, wurde von *Arndt Brünner* in seinem Artikel *Warp-Berechnung: Die „Warp“-Geschwindigkeit*[9] vorgestellt. Über seine Formel schreibt er:

> *Da die Exponenten für die Referenzwerte verdächtig rational sind bzw. man mit sehr einfachen Exponenten und ganzzahliger Rundung sehr genau die Referenzwerte trifft, halte ich es für relativ unwahrscheinlich, dass sie aus einer exponentiellen Formel gewonnen wurden, denn dann müssten die Exponenten selbst ja eher transzendente Zahlen sein.*
>
> *Wahrscheinlich ist also mein Ansatz, die Exponenten zwischen den Referenzwerten mit geeigneten kubischen Splines zu interpolieren, gar nicht so abwegig. Die durch kubische Splines gewonnenen Kurven reproduzieren freigraphisch gewonnene Kurven meist recht gut.*

Die dort vorgestellte Berechnungsvorschrift ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x^{10/3} & [1, 9[\\ e^{e^{e^{-0.018734702972 \cdot x^3 + 0.503461430242 \cdot x^2 - 4.479961234062 \cdot x + 13.885577794472}}} & [9, 9.2[\\ e^{e^{e^{0.019672187194 \cdot x^3 - 0.556568738334 \cdot x^2 + 5.27231631684 \cdot x - 16.021406694961}}} & [9.2, 9.6[\\ e^{e^{e^{0.775424977293 \cdot x^3 - 22.322249093192 \cdot x^2 + 214.222847723478 \cdot x - 684.663107196201}}} & [9.6, 9.9[\\ e^{e^{e^{34.394350080066 \cdot (x-9.9)^3 + 0.707872732413 \cdot (x-9.9)^2 - 0.240521751768 \cdot (x-9.9) + 0.733531685}}} & [9.9, 9.99[\\ e^{e^{e^{121717.36204531857 \cdot (x-9.99)^3 + 9.994347254031 \cdot (x-9.99)^2 - 1.203721550548 \cdot (x-9.99) + 0.785985893}}} & [9.99, 9.9999[\\ e^{e^{e^{0.91326550044116371670629 + 3.7190165588362 \cdot 10^{-7} / (10-x)}}} & [9.9999, 10[\end{cases}$$

Die Formel interpoliert die Werte sehr gut zwischen den durch die *Star Trek Enzyklopädie* vorgegebenen Werte. Die Güte der Extrapolation darüber hinaus kann auf diese Weise jedoch kaum abgeschätzt werden.

[8] http://de.wikipedia.org/wiki/Spline-Interpolation
[9] http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/warp/warp.htm

9 Eine Partialsummenformel für Geschwindigkeiten ab Warp 9.9

Um eine konsistente Werte-Extrapolation festzulegen, wäre eine Gesetzmäßigkeit vonnöten, aus der sich eine Bildungsvorschrift für die Exponenten der höheren Warpfaktoren ableiten ließe. Und tatsächlich lassen sich alle Exponenten für die Warpfaktoren ab einschließlich Warp 9.9 ebenfalls *exakt* annähern. *McWire* fand heraus[10] , dass die Anzahl der Neunen hinter dem Komma dieser Warpfaktoren direkt mit dem Wert des entsprechenden Exponenten zusammenhängt. Folgende Übersicht veranschaulicht diesen Zusammenhang:

Zusammenhang zwischen den Warpfaktoren ab 9.9 und deren Exponenten

Bildung der Dreieckszahlen aus dem Warpfaktor		**Ausgangsgröße**	**Bildung der Dreieckszahlen aus dem Exponenten**	
$0.5 \cdot (n \cdot n + n)$	$n = -\lg(10 - w)$	w	k	$5 \cdot (k - 3.3)$
1	1	9.9	3.5	1
3	2	9.99	3.9	3
10	4	9.9999	5.3	10
∞	∞	10	∞	∞

n entspricht der Anzahl der Neunen direkt hinter dem Komma

w Warpfaktor

k gefolgerter Exponent[a]

[a] siehe Abschnitt „Welche Referenzwerte für so eine Warpformel existieren denn nun?“, Seite 3

Obige Berechnungsvorschriften, die unter anderem unter Kenntnis der Gaußschen Summenformel[11] ersichtlich sind, lassen sich als Funktion formulieren, deren x-determiniertes Glied eine Partialsumme darstellt:

$$k(w) = 3.3 + \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=0}^{n} i \qquad \text{mit} \qquad n = -\lg(10 - w)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Erkenntnis lässt den Schluss zu, dass sich der oben genannte Zusammenhang auf alle Warpfaktoren übertragen lässt, die größer als 9 sind und als einzige Dezimalstellen eine beliebige Anzahl n an Neunen besitzen. Die Formel ist also unter dieser Schlussfolgerung ebenso dazu geeignet, die Warpfaktor-Geschwindigkeits-Wertepaare über die Referenzwerte hinaus zu extrapolieren; natürlich ohne Gewissheit.

[10] `http://www.scifi-forum.de/showthread.php?p=1278758`
[11] `http://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsche_Summenformel`

Der Bereich von einschließlich Warp 9.9 bis Warp 10 lässt sich demzufolge also mit folgender Funktion abbilden:

$$f(x) = x^{\left(\frac{\lg^2(10-x)-\lg(10-x)}{10}+3.3\right)}$$

Die Funktionswerte für Warp 9.2 und Warp 9.6 müssen aber trotzdem noch gesondert berücksichtigt werden, da nach wie vor keine Funktion bekannt ist, die diese hinreichend genau approximiert. Das Aufstellen der Warpformel läuft also auf eine Funktion hinaus, die in fünf Abschnitten definiert ist:
$[1, 9[— [9, 9.2[— [9.2, 9.6[— [9.6, 9.9[— [9.9, 10[$

10 Eine Lösung durch Erweiterung der Partialsummenformel auf reelle Zahlen

Die aus den eigentlich nur auf den natürlichen Zahlen definierten Partialsummen entwickelte Partialsummenfunktion lässt sich auch auf den Bereich der reellen Zahlen erweitern. Somit ist es möglich, *Brünners* Interpolationsformel[12] dahingehend zu modifizieren, dass *McWires* Partialsummenfunktion[13] für das Intervall $[9.9, 10[$ benutzt wird:

$$f(x) = \begin{cases} x^{10/3} & [1, 9[\\ e^{e^{e^{-0.018734702972\cdot x^3+0.503461430242\cdot x^2-4.479961234062\cdot x+13.885577794472}}} & [9, 9.2[\\ e^{e^{e^{0.019672187194\cdot x^3-0.556568738334\cdot x^2+5.27231631684\cdot x-16.021406694961}}} & [9.2, 9.6[\\ e^{e^{e^{0.775424977293\cdot x^3-22.322249093192\cdot x^2+214.222847723478\cdot x-684.663107196201}}} & [9.6, 9.9[\\ x^{\left(\frac{\lg^2(10-x)-\lg(10-x)}{10}+3.3\right)} & [9.9, 10[\end{cases}$$

Arndt Brünner schlägt dazu außerdem folgende Variation der Formel aufgrund dieser Erkenntnis vor:

[12] siehe Abschnitt „Eine Lösung durch kubische Interpolationspolynome“, Seite 7
[13] siehe Abschnitt „Eine Partialsummenformel für Geschwindigkeiten ab Warp 9.9“, Seite 8

$$
f(x) = \begin{cases}
x^{10/3} & [1,9[\\
x^{-0.11070843890016997\cdot\lg^2(10-x)-0.06109573677020381\cdot\lg(10-x)+3.33321893526299} & [9,9.2[\\
 & \textit{logarithmisch} \\
x^{(143\cdot x+18713)/6000} & [9,9.2[\\
 & \textit{linear} \\
x^{0.28728320316656963\cdot\lg^2(10-x)+0.13585043593501714\cdot\lg(10-x)+3.348567232768447} & [9.2,9.9[\\
x^{0.1\cdot\lg^2(10-x)-0.1\cdot\lg(10-x)+3.3} & [9.9,10[
\end{cases}
$$

Diese Variante verwendet weiterhin auf dem Intervall $[9.9, 10[$ die bekannte Partialsummenformel. Jedoch wurde auch für die Intervalle $[9, 9.2[$ und $[9.2, 9.9[$ eine Funktion eben dieser Form gewählt. Für ersteres Intervall lässt sich der Exponent auch linear interpolieren.

11 Eine Lösung durch lineare Interpolation der Partialsummen

McWires Warpformel jedoch benutzt die Exponenten aus der Partialsummenformel für ganzzahlige $\lg(10 - x)$ und die Exponenten 3.3381 für Warp 9.2 und 3.34 für Warp 9.6 und interpoliert die Zwischenwerte linear. Diese Formel lässt sich demnach wie folgt definieren:

$$
f(x) = x^{a(x)+w(x)\cdot[b(x)-a(x)]}
$$

$$
a(x) = \begin{cases}
10/3 & [1,9[\\
10/3 & [9,9.2[\\
3.3381 & [9.2,9.6[\\
3.34 & [9.6,9.9[\\
\frac{a_n(x)+a_n(x)^2}{10} + 3.3 & [9.9,10[
\end{cases}
\qquad
b(x) = \begin{cases}
0 & [1,9[\\
3.3381 & [9,9.2[\\
3.34 & [9.2,9.6[\\
3.5 & [9.6,9.9[\\
\frac{b_n(x)+b_n(x)^2}{10} + 3.3 & [9.9,10[
\end{cases}
$$

$$
w(x) = \begin{cases}
0 & [1,9[\\
(x-9)\cdot 5 & [9,9.2[\\
(x-9.2)\cdot 2.5 & [9.2,9.6[\\
(x-9.6)\cdot 10/3 & [9.6,9.9[\\
\frac{10^{a_n(x)}\cdot x - \lfloor 10^{a_n(x)}\cdot x\rfloor}{0.9} & [9.9,10[
\end{cases}
$$

$$
a_n(x) = \lfloor -\lg(10-x)\rfloor
$$

$b_n(x) = \lfloor -\lg(10 - x) \rfloor + 1$

Grundfaktoren alle „glatten“ Warpfaktoren: 1, 9, 9.2, 9.6, 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999 …

$f(x)$ Berechnung des Lichtgeschwindigkeitsvielfachen mit linearer Interpolation

$a(x)$ Exponent für den größten Grundfaktor kleiner als x, basierend auf der Partialsummenformel

$b(x)$ Exponent für den kleinsten Grundfaktor größer als x, basierend auf der Partialsummenformel

$w(x)$ auf das Intervall $[0, 1[$ genormte Position von x zwischen den beiden x einschließenden benachbarten Grundfaktoren mit den Exponenten $a(x)$ und $b(x)$, die für die Interpolation benötigt wird
auf dem Intervall $[1, 9[$ ist $w(x)$ immer 0, da die Exponenten in diesem Intervall nicht interpoliert werden müssen; der Exponent ist hier immer gleich 10/3

$a_n(x)$ Anzahl der Neunen direkt hinter dem Komma des Grundfaktors kleiner als x

$b_n(x)$ Anzahl der Neunen direkt hinter dem Komma des Grundfaktors größer als x

Es wird davon ausgegangen, dass die Exponenten für bestimmte Warpfaktoren bekannt sind; dies sind insbesondere die Exponenten für die Warpfaktoren, die durch die *Star Trek Enzyklopädie* gegeben sind, sowie die Exponenten, die durch die Partialsummenformel[14] gewonnen werden können. Da sich der Exponent für alle gegebenen Warpfaktoren kleiner als Warp 9 nicht ändert, können folgende Warpfaktoren als “Grundfaktoren” betrachtet werden: 1, 9, 9.2, 9.6, 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999 …

Für alle Warpfaktoren ab Warp 9 wird nun jeweils der Wert des Exponenten für den nächst größeren Grundfaktor und der Wert des Exponenten für den nächst kleineren Grundfaktor ermittelt und die dazwischen liegenden Werte linear interpoliert.

Diese Formel hat außerdem den Vorzug, dass sie für Warp 9.5 auch mit dem (non-canonischen) Wert von ungefähr 5 000 - facher Lichtgeschwindigkeit aus den *Star Trek Fact Files* relativ gut übereinstimmt. Zusätzlich nähert sie auch den Wert von 2 Mrd. km/s für Warp 9.975, der Maximalgeschwindigkeit der Voyager, ziemlich gut an. Letztgenannter Wert geht aus zwei Dialogen aus *Star Trek: Voyager* hervor:

> *That's Voyager. Intrepid class. Sustainable cruise velocity of* ***warp factor 9.975****.*
>
> — *Lieutenant Stadi* in *Caretaker*

[14] siehe Abschnitt „Eine Partialsummenformel für Geschwindigkeiten ab Warp 9.9“, Seite 8

TORRES *We could beam him out at warp speed* ***without even slowing down****. The Kazon would never be able to catch us.*
KIM *Maybe, but at a relative speed of* ***two billion kilometers per second****, it's pretty tough to get a lock on somebody.*

— aus *Maneuvers*

Insgesamt kann man den Eindruck gewinnen, linear interpolierte Werte – und damit höhere Werte als die aus einer exponentiellen Funktion gewonnene – treffen die im Star-Trek-Universum geltenden Vorstellungen der entsprechenden Geschwindigkeit besser als dies eine exponentielle Funktion tut.

12 Eine Lösung durch Partialsummeninterpolation mit rationalem Exponenten

Die gerade beschriebene lineare Interpolation der Partialsummen[15] hat jedoch zur unschönen Folge, dass der Graph der so interpolierenden Funktion innerhalb der Intervalle $[9, 9.2[$, $[9.2, 9.6[$, $[9.6, 9.9[$ und innerhalb unbegrenzt vieler Teilintervalle in $[9.9, 10[$ linear steigt. Dadurch wirkt der Graph dort seltsam „eckig“.

Auch wenn – wie bereits geschrieben – diese Art der Interpolation relativ brauchbare Ergebnisse im Hinblick auf die scheinbare Warpfaktor-Geschwindigkeits-Zuordnung innerhalb des Star-Trek-Universum bietet, scheint doch die Definition eines – zumindest optisch – glatten Graphen, der in keinem Abschnitt linear steigt, intuitiv sinnvoller zu sein; zumal alle (semi-)canonischen Abbildungen einen Graphen zeigen, der in keinem Abschnitt linear zu steigen scheint.

Als Lösung dieses Problems bietet sich beispielsweise eine Interpolation der Partialsummen mit einem geeigneten rationalen Exponenten an. Hierzu reicht es im Unterschied zur linearen Interpolation nur die Funktion $w(x)$ zu modifizieren, die bestimmt wie die Zwischenwerte zwischen den Grundfaktoren interpoliert werden. Die vormals abschnittsweise lineare Funktion wird nun abschnittsweise potenziert mit $w(x)^{p(x)}$ und dem Exponenten gegeben durch:

$$p(x) = \begin{cases} 2.5 & [1, 9.9[\\ 1.1 & [9.9, 9.99[\\ 1.5 & [9.99, 10[\end{cases}$$

Diese Werte scheinen im Hinblick auf die Anforderungen an die Funktion einen guten Kompromiss darzustellen. Eine etwas unschöne Eigenschaft der Funktion ist allerdings,

[15]siehe Abschnitt „Eine Lösung durch lineare Interpolation der Partialsummen“, Seite 10

dass die Werte für alle Grundfaktoren[16] x ab Warp 9.9 in $]x, x+\varepsilon[$ näher an $f(x)$ liegen als die Werte in $]x-\varepsilon, x[$.

Auch wenn die Funktion nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist, ist der Graph der Funktion doch schon deutlich „glatter“ als der einer linear interpolierenden. Diese Formel gibt außerdem den Wert von 5 000 - facher Lichtgeschwindigkeit für Warp 9.5 und den Wert von von ungefähr 2 Mrd. km/s für Warp 9.975 höchst zufriedenstellend wieder.

Lichtgeschwindgkeitsvielfache und Warpfaktoren nach obiger Formel

Warp	**Geschwindigkeit**	**Referenz**
1	1	*Star Trek Enzyklopädie*
2	10	*Star Trek Enzyklopädie*
3	39	*Star Trek Enzyklopädie*
4	102	*Star Trek Enzyklopädie*
5	214	*Star Trek Enzyklopädie*
6	392	*Star Trek Enzyklopädie*
7	656	*Star Trek Enzyklopädie*
8	1 024	*Star Trek Enzyklopädie*
9	1 516	*Star Trek Enzyklopädie*
9.2	1 649	*Star Trek Enzyklopädie*
9.6	1 909	*Star Trek Enzyklopädie*
9.7	2 023	*interpoliert*
9.8	2 335	*interpoliert*
9.9	3 053	*Star Trek Enzyklopädie*
9.95	5 029	*Star Trek Fact Files*
9.975	6 655	*VOY: Caretaker* und *VOY: Maneuvers*
9.99	7 912	*Star Trek Enzyklopädie*
9.999	31 609	*interpoliert*
9.9999	199 516	*Star Trek Enzyklopädie*
9.99999	1 995 250	*extrapoliert*
9.999999	31 622 753	*extrapoliert*
9.9999999	794 328 164	*extrapoliert*
10	∞	

13 Eine Lösung durch Partialsummeninterpolation mit Hilfe von Bézier-Kurven

Es existieren auch noch andere Ansätze, die Partialsummen sinnvoll zu interpolieren. Dabei soll die Interpolation einerseits möglichst nahe bei einer linearen liegen, ande-

[16] siehe Abschnitt „Annex I: Termini“, Seite 17

rerseits soll die Funktion an denen durch die Partialsummen vorgegebenen Stellen keine „Ecken“ besitzen, d.h. der Wert der existierenden Ableitungen in den Umgebungen $U_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ dieser Stellen soll (näherungsweise) gleich sein; optimalerweise ist die Funktion also differenzierbar.

Für den Bereich ab Warp 9.9 soll von der bereits bekannten Funktion[17]

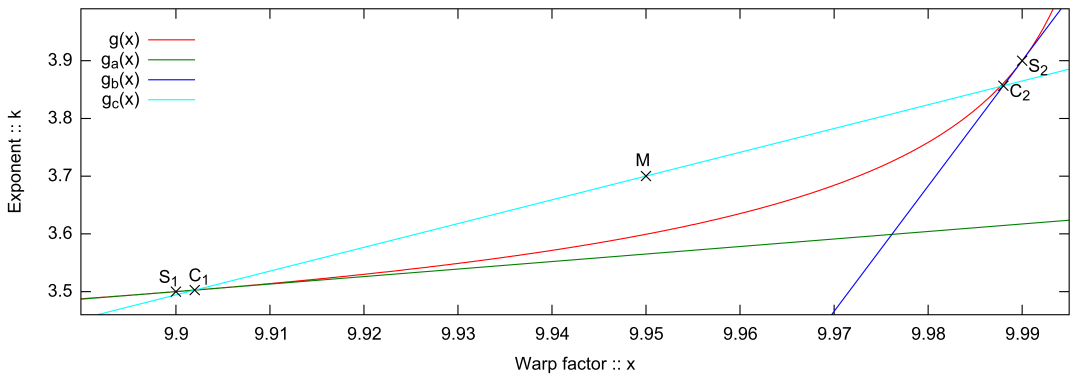
$$g(x) = \frac{\lg^2(10 - x) - \lg(10 - x)}{10} + 3.3$$

ausgegangen werden. Es ist jeweils der Bereich zwischen zwei aufeinander folgenden Grundfaktoren[18] – für die $\lg(10 - x)$ ganzzahlig ist – von Interesse.

Jeder Bereich zwischen (inklusive) Warp 9.999...9 und (exklusive) Warp 9.999...99 sei in vier Teilbereiche unterteilt, begrenzt durch Warp 9.999...9, Warp 9.999...902, Warp 9.999...95, Warp 9.999...988 und Warp 9.999...99. Die genannten Grenzen seien in dieser Reihenfolge gegeben durch die Funktionen $s_{1x}(x)$, $c_{1x}(x)$, $m_x(x)$, $c_{2x}(x)$ und $s_{2x}(x)$.

Es lassen sich nun für jeden Bereich die zwei Tangenten an $g(x)$ mit der geringsten und mit der größten Steigung bestimmen, nämlich die Tangenten an der Stelle $s_{1x}(x)$ respektive $s_{2x}(x)$, gegeben durch $g_a(x)$ und $g_b(x)$.

Weiterhin lässt sich eine lineare Funktion $g_c(x)$ durch die Punkte $C_1(c_{1x}(x), g_a(c_{1x}(x)))$ und $C_2(c_{2x}(x), g_b(c_{2x}(x)))$ bestimmen, die im aktuellen Bereich immer unterhalb der Sekante durch die Bereichsgrenzen $S_1(s_{1x}(x), g_a(s_{1x}(x)))$ und $S_2(s_{2x}(x), g_b(s_{2x}(x)))$ verläuft. Auf dieser Geraden liegt ebenfalls der Punkt $M(m_x(x), g_c(m_x(x)))$.



Die Polygone, die durch die Punkte S_1, C_1 und M sowie durch die Punkte M, C_2 und S_2 gebildet werden, beschreiben jeweils ein Kontrollpolygon für eine quadratische Bézier-Kurve[19] . So wird die Warpfunktion innerhalb jeden Bereichs zwischen je zwei Grund-

[17] siehe Abschnitt „Eine Partialsummenformel für Geschwindigkeiten ab Warp 9.9“, Seite 8
[18] siehe Abschnitt „Annex I: Termini“, Seite 17
[19] `http://de.wikipedia.org/wiki/Bézierkurve`

faktoren ab Warp 9.9 interpoliert. Auf dem Intervall zwischen Warp 9 und Warp 9.9 kann beispielsweise *Brünners* logarithmische Interpolationsformel[20] genutzt werden.

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0.02\\
m &= 0.5\\
c_2 &= 0.88
\end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{\lg^2(10-x) - \lg(10-x)}{10} + 3.3$$

$$\begin{aligned}
n(x) &= \lfloor -\lg(10-x) \rfloor\\
p(x) &= 10^{n(x)} \cdot x - \lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{1_x}(x) &= \lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor \cdot 10^{-n(x)}\\
s_{2_x}(x) &= \left(\lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor + 0.9\right) \cdot 10^{-n(x)}\\
c_{1_x}(x) &= \left(\lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor + c_1\right) \cdot 10^{-n(x)}\\
c_{2_x}(x) &= \left(\lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor + c_2\right) \cdot 10^{-n(x)}\\
m_x(x) &= \left(\lfloor 10^{n(x)} \cdot x \rfloor + m\right) \cdot 10^{-n(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{1_y}(x) &= g(s_{1_x}(x))\\
s_{2_y}(x) &= g(s_{2_x}(x))\\
c_{1_y}(x) &= g'(s_{1_x}(x)) \cdot (c_{1_x}(x) - s_{1_x}(x)) + g(s_{1_x}(x))\\
c_{2_y}(x) &= g'(s_{2_x}(x)) \cdot (c_{2_x}(x) - s_{2_x}(x)) + g(s_{2_x}(x))\\
m_x(x) &= \frac{c_{2_y}(x) - c_{1_y}(x)}{c_{2_x}(x) - c_{1_x}(x)} \cdot (m_x(x) - c_{1_x}(x)) + c_{1_y}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t(x, x_1, x_2) &= \frac{\sqrt{x \cdot x_2 + {x_1}^2 - 2 \cdot x \cdot x_1} - x_1}{x_2 - 2 \cdot x_1}\\
b(x, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) &= (1 - t(x, x_1, x_2))^2 \cdot y_0 + 2 \cdot t(x, x_1, x_2) \cdot (1 - t(x, x_1, x_2)) \cdot y_1 + t(x, x_1, x_2)^2 \cdot y_2
\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases}
x^{10/3} & [1, 9[\\
x^{-0.11070843890016997 \cdot \lg^2(10-x) - 0.06109573677020381 \cdot \lg(10-x) + 3.33321893526299} & [9, 9.2[\\
x^{0.28728320316656963 \cdot \lg^2(10-x) + 0.13585043593501714 \cdot \lg(10-x) + 3.348567232768447} & [9.2, 9.9[\\
x^{b(p(x), c_1, m, s_{1_y}(x), c_{1_y}(x), m_y(x))} & [9.9, 10[, p(x) < m\\
x^{b(p(x)-m, c_2-m, 0.9-m, m_y(x), c_{2_y}(x), s_{2_y}(x))} & [9.9, 10[, p(x) \geq m
\end{cases}$$

Grundfaktoren alle „glatten“ Warpfaktoren: 1, 9, 9.2, 9.6, 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999 …

[20] siehe Abschnitt „Eine Lösung durch Erweiterung der Partialsummenformel auf reelle Zahlen“, Seite 9

Konstanten Die x-Koordinaten der Kontrollpunkte für die Bézier-Kurve relativ zum Bereich zwischen je zwei Grundfaktoren ab Warp 9.9 werden durch Konstanten definiert; es gilt die Beziehung: $0 < c_1 < m < c_2 < 0.9$

$s_{1_x}(x)$ x-Koordinate des Punktes S_1

$s_{2_x}(x)$ x-Koordinate des Punktes S_2

$c_{1_x}(x)$ x-Koordinate des Punktes C_1

$c_{2_x}(x)$ x-Koordinate des Punktes C_2

$m_x(x)$ x-Koordinate des Punktes M

$s_{1_y}(x)$ y-Koordinate des Punktes S_1

$s_{2_y}(x)$ y-Koordinate des Punktes S_2

$c_{1_y}(x)$ y-Koordinate des Punktes C_1

$c_{2_y}(x)$ y-Koordinate des Punktes C_2

$m_y(x)$ y-Koordinate des Punktes M

$t(x, x_1, x_2)$ zu x gehörender auf das Intervall $[0, 1[$ genormter Fortschritt in der Bézier-Kurve der aufeinanderfolgenden Kontrollpunkte mit den x-Koordinaten 0, x_1 und x_2

$b(x, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2)$ y-Koordinate des zu x gehörenden Wertes in der Bézier-Kurve der aufeinanderfolgenden Kontrollpunkte mit den x-Koordinaten 0, x_1 und x_2 und den y-Koordinaten y_0, y_1 und y_2

$f(x)$ Berechnung des Lichtgeschwindigkeitsvielfachen mit Bézier-Kurven-Interpolation

14 Annex I: Termini

Grundfaktoren $G = \{1, 9, 9.2, 9.6, w : -\lg(10 - w) \in \mathbb{N}\}$

lg dekadischer Logarithmus [`http://de.wikipedia.org/wiki/Dekadischer_Logarithmus`]

ln logarithmus naturalis [`http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus_naturalis`]

$\boldsymbol{\log^2 x}$ abkürzende Notation, es gilt: $\log^2 x = (\log x)^2$

$\boldsymbol{\Theta}$ Heaviside-Funktion: [`http://de.wikipedia.org/wiki/Heaviside-Funktion`]

$\lfloor \ldots \rfloor$ Gaußklammer [`http://de.wikipedia.org/wiki/Gaußklammer`]

Partialsummen Glieder einer Reihe [`http://de.wikipedia.org/wiki/Reihe_(Mathematik)`]

Bézier-Kurve parametrische Kurve; unabhängig voneinander entwickelt von Pierre Bézier Paul de Casteljau [`http://de.wikipedia.org/wiki/Bézierkurve`]

Spline abschnittsweise definierte Funktion, deren Abschnitte sich alle aus Polynomen maximal n-ten Grades zusammensetzen [`http://de.wikipedia.org/wiki/Spline`]

Interpolation Angabe einer stetigen Funktion, die vorgegebene diskrete Referenzwerte abbildet [`http://de.wikipedia.org/wiki/Interpolation_(Mathematik)`]

Approximation Näherung [`http://de.wikipedia.org/wiki/Approximation`]

15 Annex II: Synopsis

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>9.2</td><td>9.6</td><td>9.7</td><td>9.8</td><td>9.9</td><td>9.95</td><td>9.975</td><td>9.99</td><td>9.999</td><td>9.9999</td><td>9.99999</td><td>9.999999</td><td>9.9999999</td></tr>
<tr><td colspan="22">einfache Approximation</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>393</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 517</td><td>1 634</td><td>1 909</td><td>2 029</td><td>2 380</td><td>6 725</td><td>61 063</td><td>750 685</td><td>21 546 494</td><td>1011</td><td>$4.6 \cdot 10^{14}$</td><td>$2.2 \cdot 10^{18}$</td><td>10^{22}</td><td>$4.6 \cdot 10^{24}$</td></tr>
<tr><td colspan="22">Pete Carr</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>393</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 632</td><td>1 880</td><td>1 947</td><td>2 015</td><td>2 084</td><td>2 121</td><td>2 140</td><td>2 157</td><td>2 255</td><td>3 414</td><td>215 444</td><td>$2.2 \cdot 10^{23}$</td><td>$2.2 \cdot 10^{203}$</td></tr>
<tr><td colspan="22">Martin Shields</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 632</td><td>1 925</td><td>2 072</td><td>2 388</td><td>3 464</td><td>5 764</td><td>10 453</td><td>24 596</td><td>237 006</td><td>2 361 229</td><td>23 603 464</td><td>236 025 815</td><td>$2.4 \cdot 10^{9}$</td></tr>
<tr><td colspan="22">Dominic Berry</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 640</td><td>2 018</td><td>2 185</td><td>2 450</td><td>3 029</td><td>3 867</td><td>5 126</td><td>7 912</td><td>32 100</td><td>199 516</td><td>1 857 789</td><td>25 455 239</td><td>505 994 478</td></tr>
<tr><td colspan="22">Spline-Interpolation</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 649</td><td>1 909</td><td>2 011</td><td>2 288</td><td>3 053</td><td>4 167</td><td>5 827</td><td>7 912</td><td>82 187</td><td>199 516</td><td>590 282</td><td>$1.4 \cdot 10^{16}$</td><td>$10^{10^{44.26}}$</td></tr>
<tr><td colspan="22">Partialsummenformelerweiterung auf reelle Zahlen</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 649</td><td>1 909</td><td>2 050</td><td>2 313</td><td>3 053</td><td>3 904</td><td>5 162</td><td rowspan="7">7 912</td><td rowspan="7">31 609</td><td rowspan="7">199 516</td><td rowspan="7">1 995 250</td><td rowspan="7">31 622 753</td><td rowspan="7">794 328 164</td></tr>
<tr><td colspan="16">lineare Partialsummeninterpolation</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 649</td><td>1 909</td><td>2 231</td><td>2 609</td><td>3 053</td><td>5 177</td><td>6 748</td></tr>
<tr><td colspan="16">Partialsummeninterpolation mit rationalem Exponenten</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 649</td><td>1 909</td><td>2 023</td><td>2 335</td><td>3 053</td><td>5 029</td><td>6 655</td></tr>
<tr><td colspan="16">Partialsummeninterpolation mit Hilfe von Bézier-Kurven</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>39</td><td>102</td><td>214</td><td>392</td><td>656</td><td>1 024</td><td>1 516</td><td>1 649</td><td>1 909</td><td>2 055</td><td>2 364</td><td>3 053</td><td>4 922</td><td>6 379</td></tr>
</table>

16 Referenzen

1. Warp-Berechnung: Die „Warp"-Geschwindigkeit *von Arndt Brünner*
   [`http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/warp/warp.htm`]
2. „Warpformel"-Diskussionsforumsbeitrag *von McWire*
   [`http://www.scifi-forum.de/showthread.php?p=1278758`]
3. Memory Alpha: Warpantrieb
   [`http://memory-alpha.org/de/wiki/Warpantrieb`]
4. Memory Alpha: Warpfaktor
   [`http://memory-alpha.org/de/wiki/Warpfaktor`]
5. Memory Alpha: Warp drive
   [`http://memory-alpha.org/en/wiki/Warp_drive`]
6. Memory Alpha: Warp factor
   [`http://memory-alpha.org/en/wiki/Warp_factor`]
7. Wikipedia, the free encyclopedia: Warp drive
   [`http://en.wikipedia.org/wiki/Warp_drive`]