1 Abbremsung durch Teilchenabsorption

Eine Raumschiff bewege sich durch ein kosmisches Medium aus ruhenden Teilchen und werde durch inelastische Stöße mit dem Teilchen, d.h. durch Absorption von Teilchen, abgebremst. Der Impuls des Raumschiffes inklusive der absorbierten Teilchen bleibt dabei konstant, seine Masse wird durch die Absorption jedoch immer größer, so dass die Geschwindigkeit abnimmt. Sei M_0 die Ausgangsmasse des Raumschiffes, A seine Querschnittsfläche und ρ die Dichte des kosmischen Mediums, so erhöht sich die Masse des Schiffes nach Zurücklegen der Strecke s auf

$$M(s) = M_0 + A\rho s$$

Entsprechend vermindert sich seine Geschwindigkeit $v(s)$ gegenüber der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 um den Faktor $M_0/M(s)$:

$$v(s) = \frac{M_0}{M_0 + A\rho s} v_0$$

Wie man sieht, wird die Geschwindigkeit für beliebig große Bremswege s nicht null. Man kann jedoch leicht die Strecke berechnen, nach der die Geschwindigkeit um einen bestimmten Faktor $X = v(s)/v_0$ abgenommen hat:

$$X = \frac{M_0}{M_0 + A\rho s} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{M_0}{A\rho}\left(\frac{1}{X} - 1\right)$$

1.1 Die Bremskraft

Um zu ermitteln, wie die Bremskraft von der Geschwindigkeit abhängt, bestimmen wir zunächst die Geschwindigkeit als Funktion $v(t)$ der Zeit. Dazu betrachten wir die Massenzunahme pro Zeiteinheit $\dot{M} = dM/dt$. Im Zeitintervall dt absorbiert das Raumschiff die Masse

$$dM = A\rho ds = A\rho v(t) dt$$

Da $v(t) = v_0 M(t)/M_0$, erhält man daraus die Differentialgleichung

$$\dot{M} = A\rho v_0 \frac{M(t)}{M_0}$$

für $M(t)$. Um diese zu lösen, bringen wir $M(t)$ auf die linke Seite und integrieren nach der Zeit:

$$\int_0^t \dot{M} M(t') dt' = \underbrace{\int_0^t A\rho M_0 v_0 dt'}_{A\rho M_0 v_0 t}$$

Auf der linken Seite substituieren wir $dt' \to dM = dt'/\dot{M}$:

$$\int_{M_0}^{M(t)} M dM = A\rho M_0 v_0 t$$

Lösen den Integrals auf der linken Seite ergibt

$$\frac{M(t)^2}{2} - \frac{M_0^2}{2} = A\rho M_0 v_0 t$$

Wir erhalten

$$M(t) = \sqrt{M_0^2 + 2A\rho M_0 v_0 t} = \sqrt{M_0(M_0 + 2A\rho v_0 t)}$$

und entsprechend für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{M_0}{M(t)} v_0 = \frac{M_0 v_0}{\sqrt{M_0(M_0 + 2A\rho v_0 t)}} \\ &= v_0 \sqrt{\frac{M_0}{M_0 + 2A\rho v_0 t}} \end{aligned}$$

Berechnet man die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = -\sqrt{M_0} v_0 \frac{A\rho v_0}{(M_0 + 2A\rho v_0 t)^{3/2}} \\ &= -\frac{\sqrt{M_0} A\rho v_0^2}{(M_0 + 2A\rho v_0 t)^{3/2}} \end{aligned}$$

(die negativ ist, da das Raumschiff abgebremst wird), so erkennt man zwischen dieser und der Geschwindigkeit die Beziehung

$$\dot{v} = -\frac{A\rho}{M_0 v_0} v^3$$

Die auf das Raumschiff wirkende Bremskraft $F = \dot{v}/M_0$ ist somit proportional zur dritten Potenz der Geschwindigkeit.

2 Abbremsung durch elastische Teilchenkollision

Nimmt man an, dass das Raumschiff keine Teilchen absorbiert, sondern die Teilchen elastisch am Raumschiff abprallen, so kann die Geschwindigkeit nicht mehr über eine größer werdende Raumschiffmasse ausdrücken. Stattdessen bestimmt man die Geschwindigkeit über die Betrachtung des an ein abprallendes Massenelement dm abgegebenen Impulses dp. Im Zeitintervall dt durchfliegt das Raumschiff das Volumenelement $dV = Av(t)dt$, in dem die Masse

$dm = \rho dV = A\rho v(t)dt$ enthalten ist. Diese Masse wird durch die elastische Kollision mit dem Raumschiff auf die doppelte Geschwindigkeit $2v(t)$ des Schiffes beschleunigt, so dass das Raumschiff den Impuls

$$dp = 2v(t)dm = 2A\rho v(t)^2 dt$$

abgibt. Auf das Schiff wirkt daher eine Bremskraft

$$F = -dp/dt = 2A\rho v(t)^2$$

Die Bremskraft ist somit quadratisch zur Geschwindigkeit, es liegt Newtonsche Reibung vor, der Reibungskoeffizient ist $2A\rho$.

2.1 Zeitverhalten der Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit kann dann aus folgender Differentialgleichung ermittelt werden:

$$\dot{v} = F/M = -\frac{2A\rho}{M}v^2$$

Um die Gleichung zu lösen, bringt man v^2 auf die linke Seite und integriert nach der Zeit:

$$\int_0^t \frac{\dot{v}}{v^2}dt' = -\underbrace{\int_0^t \frac{2A\rho}{M}dt'}_{\frac{2A\rho}{M}t}$$

Auf der linken Seite substituiert man die Integration nach Zeit durch eine Integration nach der Geschwindigkeit, $dt' \to dv = dt'/\dot{v}$:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v^2}dv = -\frac{2A\rho}{M}t$$

mit v_0 = Anfangsgeschwindigkeit. Lösen des Integrals ergibt

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{2A\rho}{M}t$$

Durch Auflösen nach $v(t)$ erhält man

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{2A\rho}{M}t}$$

Die Geschwindigkeit ist für $t = 0$ maximal: $v(0) = \frac{1}{1/v_0} = v_0$, und strebt für große t gegen null, wird aber nie exakt null.

2.2 Die zurückgelegte Strecke

Die vom Raumschiff zurückgelegte Strecke $s(t)$ als Funktion der Zeit ergibt sich durch Integration der Geschwindigkeit:

$$s(t) = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{2A\rho}{M}t'}dt'$$

Zum Lösen des Integrals substituiert man $X(t') := \frac{1}{v_0} + \frac{2A\rho}{M}t' \Rightarrow dX = \frac{2A\rho}{M}dt'$:

$$s(t) = \frac{M}{A\rho}\int_{X(0)}^{X(t)} \frac{1}{X}dX$$

Lösen des Integrals liefert

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{M}{2A\rho}(\ln X(t) - \ln X(0)) = \frac{M}{2A\rho}\ln\frac{X(t)}{X(0)} \\ &= \frac{M}{2A\rho}\ln\frac{1/v_0 + 2A\rho t/M}{1/v_0} \\ &= \frac{M}{2A\rho}\ln\left(1 + \frac{2A\rho}{M}v_0 t\right) \end{aligned}$$

Die zurückgelegte Strecke wächst logarithmisch mit der Zeit, d.h. für große t nur sehr langsam, sie hat jedoch keinen Maximalwert, das Raumschiff steht also nicht nach einer endlichen Strecke still.

3 Zum Vergleich: Stokessche Reibung

Bei der Stokesschen Reibung ist die Bremskraft proportional zur Geschwindigkeit:

$$F = -\beta v(t)$$

mit $\beta =$ Reibungskoeffizient. Für die Geschwindigkeit gilt damit die Differentialgleichung:

$$\dot{v} = -\frac{\beta}{M}v$$

Diese löst man, indem man v auf die linke Seite bringt und integriert:

$$\int_0^t \frac{\dot{v}}{v}dt' = -\int_0^t \frac{\beta}{M}dt'$$

Auf der linken Seite substituiert man $dt' \rightarrow dv = dt'/\dot{v}$:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v}dv = -\frac{\beta}{M}t$$

und erhält

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{\beta}{M} t$$

Exponieren auf beiden Seiten ergibt

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\beta}{M} t\right)$$

Wie bei der Newtonschen Reibung wird die Geschwindigkeit in endlicher Zeit nicht null. Jedoch kommt das Raumschiff nach einer endlichen Strecke zum Stillstand:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t v(t')dt' = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{\beta}{M} t'\right) dt' \\
&= -v_0 \frac{M}{\beta}\left[\exp\left(-\frac{\beta}{M} t\right) - \exp(0)\right] \\
&= \frac{M v_0}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{M} t\right)\right]
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist die zurückgelegte Strecke null, und nähert sich für große Zeiten an den Maximalwert $s_{max} = M v_0/\beta$ an, ohne diesen Wert je zu überschreiten.