1 Abbremsung durch Teilchenabsorption

Das Raumschiff bewege sich mit der Geschwindigkeit $v(t)$ und habe entprechend den Impuls $p(t) = Mv(t)$, M sei die Schiffsmasse ohne absorbierte Teilchen. Wenn das Raumschiff ein Massenelement dm absorbiert, vermindert sich sein Impuls um

$$dp = v(t)dm$$

da dieser Impulsbetrag an das Massenelement abgegeben wird. Auf das Schiff wirkt daher eine Bremskraft

$$F = -dp/dt = -v(t)dm/dt$$

Die pro Zeiteinheit absorbierte Masse dm/dt berechnet sich daraus, dass das Schiff im Zeitintervall dt ein Volumenelement $dV = Av(t)dt$ durchfliegt und daher die Masse $dm = \rho dV = A\rho v(t)dt$ absorbiert, wobei A die Querschnittsfläche des Schiffes ist und ρ die Dichte des kosmischen Mediums. Folglich ist die Bremskraft

$$F = -v(t)A\rho v(t) = -A\rho v(t)^2$$

Die Bremskraft ist somit quadratisch zur Geschwindigkeit, es liegt Newtonsche Reibung vor, der Reibungskoeffizient ist $A\rho$.

1.1 Zeitverhalten der Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit kann dann aus folgender Differentialgleichung ermittelt werden, wobei der Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet, d.h. $\dot{v} \equiv dv/dt$:

$$\dot{v} = F/M = -\frac{A\rho}{M}v^2$$

Um die Gleichung zu lösen, bringt man v^2 auf die linke Seite und integriert nach der Zeit:

$$\int_0^t \frac{\dot{v}}{v^2}dt' = -\int_0^t \frac{A\rho}{M}dt'$$

Das Integral auf der rechten Seite ist einfach $-\frac{A\rho}{M}t$, auf der linken Seite substituiert man die Integration nach Zeit durch eine Integration nach der Geschwindigkeit: $dt' \rightarrow dv = dt'/\dot{v}$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v^2}dv = -\frac{A\rho}{M}t$$

mit v_0 = Anfangsgeschwindigkeit. Die Stammfunktion von $1/v^2$ ist $-1/v$, so dass sich

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{A\rho}{M} t$$

ergibt. Durch Auflösen nach $v(t)$ erhält man

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{A\rho}{M} t}$$

Die Geschwindigkeit ist für $t = 0$ maximal: $v(0) = \frac{1}{1/v_0} = v_0$, und strebt für große t gegen null, wird aber nie exakt null.

1.2 Die zurückgelegte Strecke

Die vom Raumschiff zurückgelegte Strecke $s(t)$ als Funktion der Zeit ergibt sich durch Integration der Geschwindigkeit:

$$s(t) = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{A\rho}{M} t'} dt'$$

Zum Lösen des Integrals substituiert man: $X(t') := \frac{1}{v_0} + \frac{A\rho}{M} t' \Rightarrow dX = \frac{A\rho}{M} dt'$

$$s(t) = \frac{M}{A\rho} \int_{X(0)}^{X(t)} \frac{1}{X} dX$$

Die Stammfunktion von $1/X$ ist $\ln X$, so dass

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{M}{A\rho} (\ln X(t) - \ln X(0)) = \frac{M}{A\rho} \ln \frac{X(t)}{X(0)} \\ &= \frac{M}{A\rho} \ln \frac{1/v_0 + A\rho t/M}{1/v_0} \\ &= \frac{M}{A\rho} \ln \left(1 + \frac{A\rho}{M} v_0 t\right) \end{aligned}$$

Die zurückgelegte Strecke wächst logarithmisch mit der Zeit, d.h. für große t nur sehr langsam, sie hat jedoch keinen Maximalwert, das Raumschiff steht also nicht nach einer endlichen Strecke still.

2 Abbremsung durch elastische Teilchenkollision

Nimmt man an, dass das Raumschiff keine Teilchen absorbiert, sondern die Teilchen elastisch am Raumschiff abprallen, so tritt nur eine geringfügige Modifikation auf. Ein Massenelement wird nicht mehr auf die Geschwindigkeit des

Schiffes beschleunigt, sondern auf die doppelte Geschwindigkeit. Der Impulsverlust des Raumschiffes ist entsprechend verdoppelt:

$$dp/dt = 2v(t)dm/dt$$

Die Beziehung $dm = \rho dV = A\rho v(t)dt$ bleibt jedoch gültig, da sie unabhängig von der Art der Kollision allein daraus folgt, dass das Schiff in der Zeit dt das Volumen dV durchfliegt. Es gilt somit für die Bremskraft

$$F = -2A\rho v(t)^2$$

Insbesondere handelt es sich weiterhin um Newtonsche Reibung, nur der Reibungskoeffizient ist auf $2A\rho$ verdoppelt. Entsprechend ist

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{2A\rho}{M}t}$$

und

$$s(t) = \frac{M}{2A\rho} \ln\left(1 + \frac{2A\rho}{M}v_0 t\right)$$

3 Zum Vergleich: Stokessche Reibung

Bei der Stokesschen Reibung ist die Bremskraft proportional zur Geschwindigkeit:

$$F = -\beta v(t)$$

mit β = Reibungskoeffizient. Für die Geschwindigkeit gilt damit die Differentialgleichung:

$$\dot{v} = -\frac{\beta}{M}v$$

Diese löst man, indem man v auf die linke Seite bringt und integriert:

$$\int_0^t \frac{\dot{v}}{v}dt' = -\int_0^t \frac{\beta}{M}dt'$$

Auf der linken Seite substituiert man $dt' \to dv = dt'/\dot{v}$:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v}dv = -\frac{\beta}{M}t$$

und erhält

$$\ln\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{\beta}{M}t$$

Exponieren auf beiden Seiten ergibt

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\beta}{M}t\right)$$

Wie bei der Newtonschen Reibung wird die Geschwindigkeit in endlicher Zeit nicht null. Jedoch kommt das Raumschiff nach einer endlichen Strecke zum Stillstand:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t v(t')dt' = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{\beta}{M}t'\right) dt' \\
&= -v_0 \frac{M}{\beta}\left[\exp\left(-\frac{\beta}{M}t\right) - \exp(0)\right] \\
&= \frac{Mv_0}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{M}t\right)\right]
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist die Strecke null, und nähert sich für große Zeiten an Mv_0/β an, ohne diesen Wert je zu überschreiten.